

توپ‌ها توزیع در جعبه‌ها

آموزشی



مصطفی دیداری
کارشناس ارشد ریاضی

کلیدواژه
توزیع توپ در جعبه‌ها، ترکیب با تکرار، افزاز،
جمع‌وند یک عدد

چکیده

در این مقاله، دسته‌های مهمی از مسئله‌های شمارشی که به بررسی تعداد روش‌های توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها منجر می‌شوند، بررسی شده‌اند.

بسیاری از مسئله‌های شمارشی را می‌توان برحسب تعداد راه‌های توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها بیان کرد. در این مقاله چهار مسئله اساسی توزیع‌ها را به اجمال بررسی می‌کنیم. این چهار مسئله عبارت‌اند از:

۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متمایز
 ۲. تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه متمایز
 ۳. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه یکسان
 ۴. تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه یکسان
- سه مسئله اول به‌صورت مستقیم یا غیرمستقیم در کتاب‌های درسی مطرح شده‌اند، در صورتی که از مسئله چهارم صحبتی به میان نیامده است.

۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متمایز

مثال ۱. می‌خواهیم ۵ توپ با شماره‌های ۱، ۲، ... و ۵ را در ۳ جعبه به رنگ‌های آبی، قرمز و زرد توزیع کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** برای هر توپ ۳ انتخاب وجود دارد: بنابراین طبق اصل ضرب جواب مسئله $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ است.

نتیجه ۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت برابر است با: k^n .

مثال ۲. چند تابع از مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ به مجموعه $\{1, 2, 3\}$ وجود دارد؟

● **پاسخ:** عضو a می‌تواند به هر یک از عددهای ۱، ۲ و ۳ تصویر شود. بنابراین برای هر عضو از مجموعه اول ۳ انتخاب وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر است با: 3^5 .

مثال ۳. می‌خواهیم ۳ جایزه متفاوت را بین ۵ نفر توزیع کنیم، به‌طوری که به هر کدام حداکثر یک جایزه برسد. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** جایزه اول را می‌توانیم به هر کدام از ۵ نفر بدهیم. جایزه دوم را نیز به هر کدام از ۴ نفر باقی‌مانده و جایزه سوم را نیز می‌توانیم به ۳ نفر دیگر بدهیم. بنابراین طبق اصل ضرب، جواب مسئله $5 \times 4 \times 3$ است. این عدد را می‌توانیم به‌صورت $\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$ نیز بنویسیم.

نتیجه ۲. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت ($k \geq n$) که در هر جعبه حداکثر یک

توپ قرار گیرد، برابر است با: $P(k, n) = \frac{k!}{(k-n)!}$

مثال ۴. شرکتی در نظر دارد برای هر یک از شغل‌های نگهبان، دفتردار، منشی و مسئول رایانه یک نفر را استخدام کند. ۴ نفر برای استخدام در این شغل‌ها داوطلب شده‌اند. شرکت به چند روش می‌تواند افراد را برای مشاغل استخدام کند؟

● **پاسخ:** ۴!.

نتیجه ۳. تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعه n عضو به خودش برابر است با $n!$

نتیجه ۴. تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضو به خودش برابر است با $n!$



مثال ۵. مثال قبلی را در نظر بگیرید، با این تفاوت که ۱۰ نفر برای استخدام داوطلب شده باشند. پرنمودن مشاغل به چند روش امکان پذیر است؟

● **پاسخ:** ابتدا باید ۴ نفر را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{10}{4}$ روش امکان پذیر است. حال این ۴ نفر را می توان به ۴! طریق در مشاغل استخدام کرد. بنابراین جواب مسئله $\frac{10!}{6!} \times 4! = \binom{10}{4} \times 4!$ است (می توانستیم با استدلالی مشابه به عدد $10 \times 9 \times 8 \times 7$ برسیم).

نتیجه ۵. تعداد راه های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متمایز ($k \leq n$) به طوری که در هر جعبه دقیقاً یک توپ قرار گیرد، برابر است با: $S(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

مثال ۶. شرکتی در نظر دارد برای چهار شغل نگهبان، دفتردار، منشی و مسئول رایانه به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ نفر را استخدام کند. ده نفر متقاضی استخدام در این مشاغل شده اند. شرکت به چند روش می تواند این افراد را استخدام کند؟

● **پاسخ:** ابتدا می توانیم ۳ نفر را انتخاب و آن ها را مسئول رایانه کنیم. در ادامه ۲ نفر از افراد باقی مانده را برای منشی گری در نظر می گیریم و به همین ترتیب سایر مشاغل را به افراد می دهیم. بنابراین جواب مسئله $\binom{10}{3} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{1}$ است.

مثال ۷. می خواهیم ۵ توپ از رشته های ورزشی متفاوت را در سه جعبه ۱، ۲ و ۳ به گونه ای قرار دهیم که در هر جعبه حداقل یک توپ قرار گیرد. این کار به چند روش امکان پذیر است؟

● **پاسخ:** صورت دیگر مسئله به این صورت است: تعداد توابع پوشا از مجموعه ای ۵ عضوی به مجموعه $\{1, 2, 3\}$ را به دست آورید.

برای جواب دادن به این مسئله ناچاریم از اصل شمول و عدم شمول استفاده کنیم. ابتدا پیشامدهای نامطلوب را تعریف می کنیم:

پیشامدهایی که در جعبه اول توپی قرار نگیرد یا عدد ۱ تصویر هیچ: A_1
 عضوی از مجموعه اول نباشد
 پیشامدهایی که در جعبه دوم توپی قرار نگیرد یا عدد ۲ تصویر هیچ: A_2
 عضوی از مجموعه اول نباشد
 پیشامدهایی که در جعبه سوم توپی قرار نگیرد یا عدد ۳ تصویر هیچ: A_3
 عضوی از مجموعه اول نباشد
 تعداد کل حالت های نامطلوب برابر است با:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$
 $= 2^5 - 2^4 - 2^4 - 2^4 + 2^3 = 3 \times 2^5 - 3$
 دقت کنید که برای مثال، $|A_1|$ را می توان به این صورت به دست آورد که تعداد حالت هایی که در جعبه اول توپی قرار نگیرد، ۲۵ است، چون برای توزیع هر توپ دو جعبه

موجود است. برای به دست آوردن پاسخ نهایی مسئله باید کل روش‌های توزیع، یعنی 3^5 را از حالت‌های نامطلوب کم کنیم. بنابراین $3^5 - (3 \times 2^5 - 3)$ روش برای توزیع توپ‌ها با شرایط مسئله وجود دارد.

قضیه ۱. تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت ($k \leq n$) (تعداد توابع پوشا از یک مجموعه n عضوی به k عضوی) به طوری که در هر جعبه حداقل یک توپ قرار گیرد، برابر است با:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \binom{k}{0} k^n - \binom{k}{1} (k-1)^n + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} (k-k)$$

۲. توزیع n توپ یکسان در k جعبه متمایز

برای بررسی این نوع از توزیع‌ها ابتدا لازم است قضیه ۲ را یادآوری کنیم:

قضیه ۲: تعداد جایگشت‌های n شیئی که n_1 تا از آن‌ها مانند هم، n_2 تا از آن‌ها نیز مانند هم و ... n_k تا از آن‌ها مانند هم است که $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ برابر است با:

$$\frac{n!}{(n_1)!(n_2)! \dots (n_k)!}$$

مثال ۸. با حروف کلمه انتخابات چند کلمه ۸ حرفی بدون توجه به مفهوم آن می‌توان ساخت؟

● **پاسخ:** با توجه به اینکه ۳ حرف الف و ۲ حرف ت وجود دارد، پاسخ $\frac{8!}{3!2!}$ است.

مثال ۹. با ارقام ۰، ۰، ۰، ۲، ۲، ۳، ۳ و ۳ چند عدد ۸ رقمی می‌توان ساخت؟

● **پاسخ:** رقم صفر در اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند قرار بگیرد، بنابراین این رقم یا عدد ۲ یا عدد ۳ است.

۲ : اعدادی که با ۲ شروع می‌شوند.

$$\frac{7!}{3!1!2!} = 140$$

۳ : اعدادی که با ۳ شروع می‌شوند.

$$\frac{7!}{2!2!2!} = 210$$

بنابراین جواب مسئله $140 + 210 = 350$ عدد ۸ رقمی است.

مثال ۱۰. ضرب جمله $x^2 y^3 z^4 w$ در بسط $(x+y+z+w)^{10}$ چیست؟

● **پاسخ:** جمله $x^2 y^3 z^4 w$ از ضرب دو تا x ، سه تا y و چهار

تا z و یک w به دست می‌آید. بنابراین به تعداد جایگشت‌های این ده شیئی جمله $x^2 y^3 z^4 w$ در بسط وجود دارد. بنابراین ضرب آن $\frac{10!}{2!3!4!1!}$ است.

به بحث اصلی این قسمت، یعنی توزیع توپ‌های یکسان به جعبه‌های متمایز برمی‌گردیم. فرض کنید n توپ یکسان در اختیار داشته باشیم و تعداد توپ‌های توزیع شده در جعبه اول را x_1 ، تعداد توپ‌های توزیع شده در جعبه دوم را x_2 و ... تعداد توپ‌های توزیعی در جعبه k ام را x_k بنامیم. واضح است که: $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$. از طرف دیگر هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نیز متناظر با یک روش توزیع است. بنابراین می‌توان گفت تعداد روش‌های توزیع n توپ

یکسان در k جعبه متمایز برابر است با تعداد جواب‌های معادله

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geq 0 \\ i = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

مثال ۱۱. به چند روش می‌توان پنج توپ یکسان را در ۳ جعبه با رنگ‌های متفاوت توزیع کرد؟

● **پاسخ:** با توجه به توضیحات قبلی تعداد روش‌ها برابر است با جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. به این منظور ۵ توپ و دو خط، ||00000، در نظر می‌گیریم. هر جایگشت این هفت شیئی متناظر با یک جواب معادله فوق خواهد بود. برای مثال، جایگشت 0|000|0 متناظر با جواب $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 1$ است. بنابراین تعداد جایگشت‌ها یا همان تعداد جواب‌های معادله برابر است با:

$$\frac{7!}{5!2!} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2}$$

قضیه ۳. تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

مثال ۱۲. می‌خواهیم از بین ۳ نوع گل متفاوت، دسته‌گلی با ۱۰ شاخه گل درست کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** تعداد گل‌های نوع اول را x_1 ، نوع دوم را x_2 و نوع سوم را x_3 می‌نامیم. بنابراین: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ و لذا پاسخ

$$\binom{12}{2} \text{ است.}$$

مثال ۱۳. می‌خواهیم ۱۰ سکه تمام بهار آزادی را بین نفرات اول تا سوم یک مسابقه به گونه‌ای توزیع کنیم که به نفر اول

حداقل ۳ سکه، به نفر دوم حداقل ۲ سکه و به نفر سوم حداقل یک سکه برسد. این کار به چند روش امکان پذیر است؟

● **پاسخ:** جواب مسئله برابر با جواب های صحیح و نامنفی

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 \geq 3, x_2 \geq 2, x_3 \geq 1 \end{cases}$$

است. به این منظور ابتدا ۳

سکه به نفر اول، ۳ سکه به نفر دوم و ۱ سکه به نفر سوم می دهیم. بنابراین تعداد روش ها، برابر است با تعداد روش های توزیع ۴ سکه باقی مانده بین ۳ نفر که این تعداد برابر است با:

$$\binom{6}{2} = 15$$

مثال ۱۴: می خواهیم ۱۲ سکه تمام بهار آزادی را بین نفرات اول تا سوم یک مسابقه با شرایط زیر توزیع کنیم:

(الف) به نفر اول بیشتر از ۳ سکه

(ب) به نفر دوم حداقل یک و حداکثر ۳ سکه

(ج) به نفر سوم حداکثر ۲ سکه

این کار به چند روش امکان پذیر است؟

● **پاسخ:** تعداد روش ها برابر است با جواب های صحیح و

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 > 3, 1 \leq x_2 \leq 3, x_3 \leq 2 \end{cases}$$

نامنفی معادله . برای از بین بردن

شرط های بزرگ تری، ۴ سکه به نفر اول و یک سکه به نفر دوم می دهیم. بنابراین کافی است ۷ سکه باقی مانده را با شرایط

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 7 \\ y_1 \leq 2, y_2 \leq 2 \end{cases}$$

توزیع کنیم (دستگاه دوم) y_1 برابر است

با تعداد سکه هایی که به نفر اول از بقیه سکه ها می رسد و...
برای از بین بردن شرط کوچک تری باید از اصل شمول و عدم شمول استفاده نماییم. بنابراین پیشامدهای نامطلوب به صورت روبه رو

$A_1 = y_1 > 2$ ها در آن ها ۲ تعداد جواب هایی که

$A_2 = y_2 > 2$ ها در آن ها ۲ تعداد جواب هایی که

تعریف می شود.

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \\ &= \binom{4+3-1}{3-1} + \binom{4+3-1}{3-1} - \binom{1+3-1}{3-1} = 27 \end{aligned}$$

$$\binom{7+3-1}{3-1} - 27 = 9$$

بنابراین پاسخ مسئله برابر است با:

(چون کل جواب های دستگاه دوم را از حالت های نامطلوب کم می کنیم).

مثال ۱۵: تعداد جمله های بسط $(x + y + z + w)^{10}$ را به دست آورید.

● **پاسخ:** هر جمله بسط فوق به صورت $x^a y^b z^c w^d$ است که در آن داریم: $a + b + c + d = 10$. بنابراین هر جواب صحیح و نامنفی این معادله متناظر با یک جمله از بسط است و جواب مسئله $\binom{13}{3}$ است.

مثال ۱۶: چند سه تایی مرتب از اعداد طبیعی مانند (a,b,c) وجود دارد که: $abc = 3^{12}$ ؟

● **پاسخ:** واضح است که باید $a = 3^x, b = 3^y, c = 3^z$. بنابراین: $3^{x+y+z} = 3^{12}$ و لذا: $x + y + z = 12$.

بنابراین به ازای هر جواب صحیح و نامنفی معادله فوق دقیقاً یک سه تایی به دست می آید. در نتیجه پاسخ مسئله $\binom{14}{2}$ است.

مثال ۱۷: چند سه تایی مرتب از اعداد طبیعی مانند (a,b,c) وجود دارد که: $abc = 2^{10} \times 3^{12}$ ؟

● **پاسخ:** شکل کلی اعداد a,b,c باید به صورت $a = 2^{x_1} \times 3^{y_1}, b = 2^{x_2} \times 3^{y_2}, c = 2^{x_3} \times 3^{y_3}$ باشد.

بنابراین، با توجه به $abc = 2^{10} \times 3^{12}$ باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 12 \end{cases}$$

که تمامی متغیرها صحیح و نامنفی اند.

هر جواب دستگاه متناظر با یک سه تایی است، در نتیجه جواب

$$\text{مسئله } \binom{12}{2} \binom{14}{2} \text{ است.}$$

قابل ذکر است که تعداد سه تایی های صحیح با شرایط

$$\text{مسئله فوق برابر است با: } 4 \times \binom{12}{2} \binom{14}{2} \text{ (چرا؟)}$$

۳. توزیع n توپ متمایز در k جعبه یکسان

مثال ۱۸: می خواهیم از بین ۴ نفر، دو تیم دو نفره تشکیل دهیم تا با هم مسابقه دهند. این کار به چند روش امکان پذیر است؟

● **پاسخ:** فرض کنیم این چهار نفر را با مجموعه $\{a,b,c,d\}$

نمایش دهیم. هر انتخاب دو عضو از این چهار نفر، دو تیم را به وجود می آورد. بنابراین ممکن است گفته شود جواب مسئله

$$\binom{4}{2}$$

است. اما باید دقت کرد که انتخاب دو عضو a و b تیم های

$\{a,b\}$ و $\{c,d\}$ و انتخاب دو عضو c و d نیز همان تیم‌بندی را به وجود می‌آورد. بنابراین پاسخ مسئله $\frac{1}{2!} \binom{4}{2} = 3$ است. این تیم‌بندی‌ها به این صورت است: $\{a,b\} \{c,d\}$ ، $\{a,c\} \{b,d\}$ و $\{a,d\} \{b,c\}$.

مثال ۱۹. می‌خواهیم ۴ توپ متمایز را در ۴ جعبه یکسان توزیع کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** چهار توپ را با مجموعه $\{a,b,c,d\}$ نمایش می‌دهیم و توزیع‌ها را به چهار دسته زیر تقسیم می‌کنیم:

(الف) در تمامی جعبه‌ها توپ قرار گیرد.

(ب) در سه جعبه توپ قرار گیرد و یکی خالی بماند.

(ج) در دو جعبه توپ قرار گیرد و دو جعبه خالی بمانند.

(د) در یک جعبه توپ قرار گیرد و بقیه جعبه‌ها خالی بمانند.

واضح است بخش الف فقط دارای توزیع $\{a\} \{b\} \{c\} \{d\}$ و بخش د نیز فقط دارای توزیع $\{a,b,c,d\}$ است. برای به دست آوردن حالت‌های بخش ب می‌توان گفت: باید یک جعبه دو عضوی و دو جعبه یک عضوی داشته باشیم. بنابراین تعداد این

توزیع‌ها (افرازاها) برابر است با: $\frac{\binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{1}}{2!} = 6$ (مستقیماً حالت‌ها را بنویسید). تقسیم بر ۲! به دلیل وجود دو مجموعه تک‌عضوی است که جابه‌جایی آن‌ها حالت جدیدی را به وجود نمی‌آورد. اما بخش ج. در این حالت یا دو جعبه هر کدام دارای دو توپ داریم که تعداد آن‌ها می‌شود: $3 = \frac{\binom{4}{2} \binom{2}{2}}{2!}$ و یا جعبه‌ای سه‌تویی و یک جعبه یک‌تویی داریم که تعداد آن‌ها برابر است با $4 = \binom{4}{3} \binom{1}{1}$ است. بنابراین به $15 = 1 + 6 + 3 + 4$ روش می‌توان ۴ توپ متمایز را در ۴ جعبه یکسان توزیع کرد.

نتیجه: تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه یکسان برابر است با تعداد راه‌های افرازا مجموعه n عضوی به یک، دو، ...، k مجموعه.

مثال ۲۰. می‌خواهیم ۴ توپ متمایز را در ۳ جعبه یکسان توزیع کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** جواب مسئله برابر است با تعداد افرازاها مجموعه $\{a,b,c,d\}$ به یک یا دو یا سه مجموعه. این تعداد با توجه به

مثال ۱۹ برابر است با ۱۴.

مثال ۲۱. ۱۲ نفر را به چند روش می‌توان در ۴ اتاق ۳ نفره اسکان داد؟

● **پاسخ:** $\frac{\binom{12}{3} \binom{9}{3} \binom{6}{3} \binom{3}{3}}{4!}$. دقت کنید که در این تعداد، اتاق‌ها (جعبه‌ها) با یکدیگر تفاوتی ندارند.

در پایان این قسمت می‌خواهیم رابطه‌ای کلی برای به دست آوردن تعداد افرازاها ارائه دهیم. فرض کنید $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ برابر با تعداد راه‌های توزیع n شیء متمایز در k جعبه یکسان بوده است، به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند. در واقع $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ همان تعداد راه‌های افرازا مجموعه n عضوی به k زیرمجموعه ناتهی است. قابل ذکر است که اعداد $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ را «اعداد استرلینگ نوع دوم» نیز می‌نامند.

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \quad \text{قضیه ۴.}$$

برهان: بنابر قضیه ۱، $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$ تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت است به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند.

این توزیع‌ها را به روشی دیگر نیز به دست می‌آوریم. ابتدا فرض می‌کنیم n شیء را در k جعبه یکسان توزیع کرده‌ایم، به طوری که هیچ جعبه‌ای خالی نماند.

حال می‌توانیم جعبه‌ها را به $k!$ طریق با اعداد $1, 2, \dots, k$ نام‌گذاری کنیم. بنابراین تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه متفاوت به طوری که هیچ کدام خالی نماند برابر است با: $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} k!$ و حکم ثابت است.

مثال ۲۲. تعداد راه‌های توزیع ۵ توپ متمایز را در ۳ جعبه یکسان به دست آورید، به طوری که جعبه‌ای خالی نماند.

● **پاسخ:**

$$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3!} \left(\binom{3}{0} (3-0)^5 - \binom{3}{1} (3-1)^5 + \binom{3}{2} (3-2)^5 \right) \\ = \frac{1}{6} (3^5 - 3 \times 2^5 + 3)$$

نتیجه: تعداد راه‌های توزیع n توپ متمایز در k جعبه

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} + \dots + \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

ایستگاه اندیشه و ادب ریاضی

ایستگاه دوم: سه معمای پانزده

سرگرمی
سر علمی

هوشنگ شرقی

من و دو دخترم دیشب برای شام تنها بودیم و مادر آن‌ها برای کاری واجب به منزل مادرش رفته بود! من که آشپزی بلد نیستم و نمی‌خواستم از غذاهای فست‌فودی استفاده کنم، تصمیم گرفتم که به غذاهای ساده‌ی خانگی بسنده کنم و دخترها هم به‌همین رضایت دادند. در تهیه‌ی این غذاها عامل زمان بسیار مهم بود، ولی متأسفانه تمام ساعت‌هایمان خوابیده بودند و تنها ابزارهای اندازه‌گیری زمان برای ما ساعت‌های شنی متفاوتی بودند که در اختیار داشتیم. در نتیجه‌ی این موضوع سه چند معمای جالب بر خوردیم که آن‌ها را برایتان نقل می‌کنم.

◆ معمای اول: تخم‌مرغ‌های پخته!

اولین چیزی که تصمیم گرفتیم بخوریم، تخم‌مرغ آب‌پز بود (البته چیزهای دیگری هم داشتیم!) برای آنکه مطمئن شویم تخم‌مرغ‌ها کاملاً سفت و پخته می‌شوند، ۱۵ دقیقه باید در آب می‌جوشیدند و چون کمی گرسنه بودیم، می‌خواستیم بلافاصله بعد از ۱۵ دقیقه تخم‌مرغ‌ها را بخوریم. به کمک دو ساعت شنی که یکی ۷ دقیقه‌ای و دیگری ۱۱ دقیقه‌ای است، به هر زحمتی بود توانستیم زمان ۱۵ دقیقه را اندازه‌گیری کنیم و بلافاصله بعد از ۱۵ دقیقه، تخم‌مرغ‌هایمان هم آماده‌ی خوردن بودند. به‌نظر شما چه‌طور این ۱۵ دقیقه را اندازه گرفتیم؟

◆ معمای دوم: تخم‌مرغ‌های عسلی!

بعد از خوردن تخم‌مرغ‌های پخته، باز هم گرسنه بودیم! تصمیم گرفتیم چند تخم‌مرغ عسلی هم بخوریم. برای پخته‌شدن تخم‌مرغ عسلی گذشت ۹ دقیقه وقت، لازم و کافی بود. پس باید ۹ دقیقه وقت را اندازه‌گیری می‌کردیم و این بار می‌خواستیم از یک ساعت شنی ۴ دقیقه‌ای و یک ساعت شنی ۷ دقیقه‌ای استفاده کنیم. چگونه توانستیم این کار را انجام دهیم به‌طوری که درست پس از ۹ دقیقه همه‌ی تخم‌مرغ‌هایمان حاضر بودند؟

◆ معمای سوم: کتلت‌های خوشمزه!

بعد از خوردن تخم‌مرغ‌های عسلی، باز هم گرسنه بودیم! ولی دختر بزرگم گفت: «عیبی ندارد بابا! سه تا کتلت در یخچال داریم که به هر کدامان یکی از آن‌ها می‌رسد. فقط باید کمی سرخ شوند، چون سرد و یخ‌زده هستند.»
حال باید هر طرف هر کتلت را یک دقیقه سرخ می‌کردیم. مشکل ما دیگر زمان نبود، چون با ساعت شنی یک دقیقه‌ای که داشتیم این کار را به سادگی می‌توانستیم انجام دهیم. مشکل این بود که یک ماهی‌تابه کوچک برای سرخ کردن داشتیم که فقط گنجایش دو کتلت را داشت و ما می‌خواستیم سه دقیقه بعد کتلت‌هایمان حاضر باشند! چه‌طور این کار را انجام دادیم؟

یادتان باشد که باید هر دو طرف هر سه کتلت سرخ شوند و هر طرف یک دقیقه طول می‌کشد تا سرخ شود و ماهی‌تابه برای دو کتلت جا دارد.

۴. توزیع n توپ یکسان در k جعبه یکسان

مثال ۲۳: می‌خواهیم عدد ۵ را به‌صورت جمع اعداد طبیعی بنویسیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** تعداد روش‌ها را به پنج دسته زیر تقسیم‌بندی می‌کنیم:

الف) جمع یک عدد $5=5$

ب) جمع دو عدد $5=4+1=3+2$

ج) جمع سه عدد $5=3+1+1=2+2+1$

د) جمع چهار عدد $5=2+1+1+1$

ه) جمع پنج عدد $5=1+1+1+1+1$

بنابراین جواب مسئله ۷ روش است.

مثال ۲۴: می‌خواهیم ۵ توپ یکسان را در ۵ جعبه یکسان

توزیع کنیم. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

● **پاسخ:** ۷ روش (چرا؟)

نتیجه: تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه

یکسان برابر است با تعداد حالت‌هایی که بتوان

عدد n را به‌صورت جمع یک، دو، ... و k عدد

طبیعی نوشت.

مثال ۲۵: به چند روش می‌توان ۷ توپ یک‌رنگ را در ۳ جعبه

یکسان قرار دارد، به‌طوری که هیچ کدام خالی نماند؟

● **پاسخ:** باید دید که به چند روش می‌توان عدد ۷ را

به‌صورت مجموع ۳ عدد طبیعی نوشت:

$$7=5+1+1=4+2+1=3+3+1=3+2+2$$

مثال ۲۶: به چند روش می‌توان n توپ یکسان را در $n-1$ جعبه

یکسان توزیع کرد، به‌طوری که هیچ کدام خالی نماند؟ ($n \geq 2$)

پاسخ: یک روش

مثال ۲۷: به چند روش می‌توان n توپ یکسان را در $n-2$ جعبه

یکسان توزیع کرد، به‌طوری که هیچ کدام خالی نماند؟ ($n \geq 4$)

● **پاسخ:** دو روش

مثال ۲۸: به چند روش می‌توان n توپ یکسان را در دو جعبه

توزیع کرد، به‌طوری که هیچ کدام خالی نماند؟

● **پاسخ:** $n = 1 + (n-1) = 2 + (n-2) + \dots$ بنابراین

پاسخ مسئله $\left[\frac{n}{2} \right]$ است.

شایان ذکر است که در حالت کلی فرمولی صریح برای

تعداد راه‌های توزیع n توپ یکسان در k جعبه یکسان ارائه

نشده است، اما در کتاب‌های ریاضی می‌توان رابطه‌ی بازگشتی

برای این مسئله پیدا کرد.